LIBRIS | We know books

GHEORGHE-ADALBERT SCHNEIDER

CULEGERE DE PROBLEME DE ANALIZA MATEMATICA PENTRU CLASELE XI - XII

Ediţia a-6-a
revizuită şi adăugită

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2023

LIBRIS | We know books

CUPRINS

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION SRL
CRAIOVA

LIBRIS We know books

1. MULŢIMI DE PUNCTE PE DREAPTA REALĂ. FUNCŢII REALE DE VARIABILĂ REALĂ

1. Să se arate că mulţimea A este mărginită inferior în fiecare din cazurile de mai jos şi să se determine mulţimea de minoranţi:

a) $A=(-1,1)$ b) $A=[-5,7]$ c) $A=[-2,5)$

d) $A=(0,7]$ e) $A=(2,+\infty)$ f) $A=[0,+\infty)$

g) $A=\{-1,0,2\}$ h) $A=(0,1)\cup\{2\}$ I) $A=\{0\}\cup(1,+\infty)$.

2. Să se arate că mulţimea A este mărginită superior în fiecare din cazurile de mai jos şi să se determine mulţimea de majoranţi:

a) $A=(-1,0)$ b) $A=[-3,2]$ c) $A=[-2,1)$

d) $A=(0,1]$ e) $A=(-\infty,5)$ f) $A=(-\infty,1]$

g) $A=\{-2,0,2\}$ h) $A=(0,2)\cup\{5\}$ I) $A=\{5\}\cup(-\infty,0)$.

3. Să se arate că mulţimea A este mărginită în fiecare din cazurile de mai jos:

a) $A=(-3,3)$ b) $A=[-1,2]$ c) $A=[-5,1)$

d) $A=(0,2]$ e) $A=(0,1)\cup\{-1\}$ f) $A=(-1,1]$

g) $A=\{-1,0,4\}$ h) $A=(0,3)\cup\{9\}$ I) $A=\{0\}\cup(2,4)$.

4. Să se arate că mulţimea A este mărginită în fiecare din cazurile de mai jos:

a) $A=(-3,3)\cup[5,6]$ b) $A=[-1,2]\cup(5,6)$

c) $A=[-5,1)\cup(3,5]$ d) $A=(0,2]\cup\{3\}$

e) $A=(0,1)\cup(2,3)$ f) $A=(-1,1]\cup\{2,3\}$.

5. Să se arate că mulţimea A nu este mărginită în fiecare din cazurile de mai jos:

LIBRIS We know books

a) $A=(-1,+\infty)$ b) $A=[-3,+\infty)$ c) $A=\mathbf{N}$

d) $A=\mathbf{R}$ e) $A=(-\infty,0)$ f) $A=(-\infty,3]$

g) $A=\mathbf{Q}$ h) $A=(0,+\infty)$ i) $A=\{5\}\cup(-\infty,0)$.

6. Să se determine minoranţii şi majoranţii min A, max A (dacă există) pentru următoarele submulţimi A ale dreptei reale:

a) $A=(-1,1)\cup(2,+\infty)$;

b) $A=(-\infty,1]\cup(2,5]$;

c) $A=[-5,3)\cup[7,9)$;

d) $A=[-4,-3]\cup[2,3]\cup(5,7]$;

e) $A=(-2,3)\cup(4,7)\cup(8,15]$;

f) $A=[0,1]\cup[2,3]\cup(5,7]$;

g) $A=[0,2)\cup(5,7)\cup[9,19)$.

7. Să se determine inf A, sup A (calculate în $\overline{\mathrm{R}}$) pentru următoarele submulţimi A ale dreptei reale:

a) $A=(-1,2)\cup(3,+\infty)$; b) $A=(-\infty,3]\cup[5,+\infty)$;

c) $A=(-2,2]\cup[5,12]$; d) $A=(-3,0)(1,3)$;

e) $A=[-7,1]\cup[3,9]$; f) $A=[-5,-1]\cup[2,3]$;

g) $A=[-2,3]\cup[5,9]\cup[15,+\infty)$.

8. Să se arate că următoarele submulţimi A ale lui $\mathbf{R}$ sunt mărginite şi să se determine max A şi min A (dacă există):

a) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-1<0\}$ b) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x+2<0\}$

c) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|\le 3\}$ d) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-3|\le 5\}$

e) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-x<0\}$ f) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x<0\}$

9. Să se arate că următoarele submulţimi A ale lui $\mathbf{R}$ sunt nemărginite şi să se determine în $\overline{\mathrm{R}}$ inf A şi sup A:

a) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-1>0\}$; b) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^4-3x^2>4\}$;

c) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^3+x\ge 0\}$; d) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^3\ge 7x-6\}$;

e) $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{x^2+1}{x-1}>0\right\}$; f) $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{x^4+1}{x-1}<0\right\}$;

g) $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{x^4+1}{x^2-1}>0\right\}$.

10. Să se arate că următoarele submulţimi A ale lui $\mathbf{R}$ sunt mărginite şi să se indice în fiecare caz în parte marginea inferioară şi marginea superioară:

a) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-4<0\}$; b) $A=\left\{x\in\mathrm{R}\mid \frac{x^2+1}{x-1}<x\right\}$;

c) $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{x^2+1}{x^2-1}<0\right\}$; d) $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{e^x}{x^2-4}\le 0\right\}$;

e) $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{e^x-1}{x+1}<0\right\}$; f) $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{x^2-4x+3}{e^x+1}\le 0\right\}$

g) $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{x^4-4}{e^{2x}-e^x+1}\le 0\right\}$.

11. Să se determine câte o vecinătate pentru fiecare din următoarele puncte:

a) 1 b) -5 c) 0 d) 7 e) -20 f) 2 g) -5.

12. Să se determine punctele pentru care mulţimile următoare sunt vecinătăţi:

a) $(-1,1)$ b) $[0,2]$ c) $[3,7)$ d) $(-3,0]$

e) $\mathbf{R}$ f) $(0,+\infty)$ g) $(-\infty,0]$ h) $[-3,3]$.

13. Să se determine mulţimea punctelor de acumulare în $\overline{\mathrm{R}}$ pentru fiecare din următoarele mulţimi:

a) $(-1,2)$ b) $[2,4]$ c) $[-1,2)$ d) $(-1,4]$

LIBRIS We know books

e) $(0,+\infty)$ f) $(-\infty,5)$ g) $\mathbf{Z}$ h) $\mathbf{Q}$.

14. Să se determine mulţimile:

a) $\bigcap\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left[1,\frac{n+1}{n}\right]$;
b) $\bigcap\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left(0,\frac{1}{n+2}\right)$;

c) $\bigcap\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left[0,\frac{n+2}{n}\right]$;
d) $\bigcap\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left(1,\frac{n+3}{n}\right)$;

e) $\bigcap\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left[1,\frac{2n+1}{n}\right]$;
f) $\bigcap\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left[2,\frac{3n+1}{n}\right)$;

g) $\bigcap\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left[1,\frac{4n+3}{2n+1}\right]$;
h) $\bigcup\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left[1,\frac{2n}{n+1}\right]$;

i) $\bigcup\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left[0,\frac{4n+1}{n+2}\right]$;
j) $\bigcup\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left(2,\frac{3n}{n+2}\right]$;

k) $\bigcup\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left(5,\frac{5n}{n+1}\right)$;
l) $\bigcup\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left[1,\frac{3n}{n+4}\right]$;

m) $\bigcup\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left(1,\frac{5n+1}{n+1}\right]$;
n) $\bigcup\limits_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}}\left[2,\frac{9n}{3n+1}\right]$.

15. Să se determine domeniile maxime de definiţie pentru fiecare din următoarele funcţii:

a) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ b) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $f(x)=\sqrt{x-1}$

d) $f(x)=\frac{x+1}{x+|x|}$ e) $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$ f) $f(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$

g) $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ h) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ i) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$.

16. Să se arate că următoarele funcţii sunt mărginite:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin x+2\cdot\cos x$;

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=e^{-|x+1|}$;

c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}$;

d) $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{x^2+2x}{x^4+2}$;

e) $f:[1,+\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{x^3+2x}{x^6+x^2+5}$;

f) $f:[0,\pi]\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{2x^2+\sin 2x}{x^4+2}$;

g) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{x+e^x}{x^2+e^{2x}+2}$.

17. Să se demonstreze că dacă $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{R}$ este o mulţime nemărginită, atunci **A** se poate scrie ca o reuniune numărabilă de mulţimi mărginite.

18. Să se demonstreze că există un şir descendent $(\mathbf{I}_n)$ $n\geq 1$ de intervale deschise astfel încât să avem egalitatea:

$$[a,b]=\bigcap_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}} I_n\ .$$

19. Să se demonstreze că există un şir ascendent (I_n) $n\geq 1$ de intervale închise astfel încât să avem egalitatea:

$$(a,b)=\bigcup_{\substack{n\in N\\ n\geq 1}} I_n\ .$$

20. Fie $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2\subseteq\mathbf{R}$. Să se demonstreze egalităţile:

a) $\sup(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2)=\max\{\sup\mathbf{A}_1,\sup\mathbf{A}_2\}$;

b) $\inf(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2)=\min\{\inf\mathbf{A}_1,\inf\mathbf{A}_2\}$.

21. Fie $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{R}$. Să se demonstreze egalitatea:

$$\sup_{x\in A}|x|=\max\{|\sup\mathbf{A}|,|\inf\mathbf{A}|\}\ .$$

22. Fie $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{R}$ astfel încât:
1) $a \le b\ (\forall)\ a \in \mathbf{A},\ (\forall)\ b \in \mathbf{B}$;
2) $(\forall) n \ge 1,\ (\exists)\ a_n \in \mathbf{A},\ (\exists)\ b_n \in \mathbf{B}$ astfel încât $b_n - a_n < \frac{1}{n}$.

Să se demonstreze că $\sup \mathbf{A} = \inf \mathbf{B}$.

23. Fie $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}_+$ astfel încât:

$$f(n+1) \le \frac{1}{n+1} \cdot \max\{f(1), f(2), ..., f(n)\}.$$

Să se arate că $\inf\limits_{n \in N^*} f(n) = 0$.

24. Să studieze paritatea următoarelor funcţii:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{x^2+1}{1+|x+1|}$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{x^4+2x^2+1}{x^2+|x|}$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}+|x^2-4|}$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{1+\sqrt{x^2+1}}$;

e) $f : (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \ln \frac{x-2}{x+2}$.

25. Să studieze imparitatea următoarelor funcţii:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{x^3}{x^4-x^2+1}$;

b) $f : \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{x^5-x}$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}+|x^2-1|}$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{x^3+2x^2+1}{1+\sqrt{x^2+4}}$.

26. Să studieze periodicitatea următoarelor funcţii:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \{x+2\}$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - x + 1$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sin^2 x$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \operatorname{tg} 3x$;

e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x + \sin x$

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x + \{x+1\}$.

27. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \big|x - |x-1|\big|$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \big|x + |x-1|\big|$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \big||2x+1| - x\big|$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \Big|x - \big|x - |x-1|\big|\Big|$;

e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \Big|x - \big|x - |x+1|\big|\Big|$;

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \big|x - |x-1|\big| + \big|x - |x+1|\big|$;

g) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \big|x - |x|\big| - \big|x + |x|\big|$.

28. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \min(x^2-1, x-1)$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \min(x^2-x+1, -x+1)$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \min(1-x, x^2)$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \min(1, x, x^2)$;

e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \min(1, -2x, x^2+1)$;

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \min(-1, x, x^4, x^5)$;

g) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \min(1, x, -x^2, x^4, -x^6)$.

29. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \max(x^2-3x, -2)$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \max(x^2, x)$;

LIBRIS we know books

LIBRIS We know books

c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\max(1+x,\ 1+x^2)$;

d) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\max(1,\ x^3,\ x^5)$;

e) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\max(1,\ -x,\ x)$;

f) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\max(1,\ -x,\ x^5)$;

g) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\max(1,\ -x^2,\ x^2)$.

30. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=[x+1]-[x]$;

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=[2x+1]-[x]$;

c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\left[x+\frac{1}{3}\right]$;

d) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x-[x]$;

e) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x+[x]$;

f) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2x-[x]$;

g) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x-[x+1]$.

31. Să se demonstreze că oricare ar fi a, b, $c>0$, sunt adevărate următoarele inegalităţi:

a) $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$;

b) $\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c$;

c) $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$;

d) $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{c^4}+\frac{c^4}{a^4}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$;

e) $(a^2+b^2+c^2)\cdot(a^4+b^4+c^4)\ge 9a^2b^2c^2$;

f) $abc\ge(-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)$;

g) $a^3+b^3+c^3\ge 3\cdot(-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)$.

32. Pentru a, b, $c>0$, să se determine valoarea minimă a expresiei:

a) $E(a,b,c)=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$;

b) $E(a,b,c)=\left(\frac{b}{ac}+a\right)\cdot\left(\frac{c}{ab}+b\right)\cdot\left(\frac{a}{bc}+c\right)$;

c) $E(a,b,c)=(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$;

d) $E(a,b,c)=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$.

33. Fie $a,b\in\mathbf{R}_+^*$ astfel încât $a+b=1$. Să se determine valoarea maximă a expresiei $E(a,b)=ab$.

34. Fie $a,b\in\mathbf{R}_+^*$ astfel încât $a+b=1$. Să se determine valoarea minimă a expresiei:

a) $E(a,b)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; b) $E(a,b)=\frac{a^3+b^3}{ab}$; c) $E(a,b)=\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}$.

35. Dacă $a,b,c>0$ şi $a+b+c=6$, să se determine valoarea minimă a expresiei:

a) $E(a,b,c)=a^2+b^2+c^2$;

b) $E(a,b,c)=\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}$;

c) $E(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$;

d) $E(a,b,c)=\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}$.

36. Fie $a,b\in\mathbf{R}_+^*$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=1$. Să se determine valoarea maximă a expresiei:

a) $E(a,b,c)=ab+bc+ca$;

b) $E(a,b,c)=(a+b+c)^2$.